12. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(abzugeben am Donnerstag, 12.07.2007)

Aufgabe H33 *Bewegtes Elektron* (5 Punkte)

Ein ruhendes freies Elektron, das sich in einem Spin-Eigenzustand gemäß $\sigma_z \psi = \psi$ befindet, wird durch die Wellenfunktion

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}$$

beschrieben. Finden Sie die Wellenfunktion eines freien Elektrons, das sich mit der Geschwindigkeit $+v$ in x-Richtung bewegt, indem Sie auf ein mit $-v$ relativ zum Ruhesystem bewegtes Koordinatensystem transformieren. Befindet sich das bewegte Elektron noch in einem Eigenzustand von σ_z?

Hinweis:

Verwenden Sie $\psi'(x') = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}}\psi(x)$ aus der Vorlesung, und überlegen Sie sich, welches $\omega_{\alpha\beta} \neq 0$ ist. Nennen Sie dies ω. Es gilt $\tanh \omega = -v$.

Aufgabe H34 *Ladungskonjugation* (5 Punkte)

Ein Spinor ψ mit der Ladung q genügt der Diracgleichung

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}qA_\mu) - m)\,\psi = 0\ .$$

Bestimmen Sie die Transformation, die ψ in den ladungskonjugierten Spinor ψ^c (mit der Ladung $-q$) überführt, für den demnach

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}qA_\mu) - m)\,\psi^c = 0$$

gilt. Machen Sie dazu den Ansatz $\psi^c = C\bar{\psi}^T = C\gamma^0\psi^*$, und zeigen Sie, daß $C = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^0$. Welches Transformationsverhalten unter Ladungskonjugation haben die Bilinearformen $\bar{\psi}\psi$, $\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_5\psi$ sowie $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$?

Hinweise:

Es gilt $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}$ und $\gamma^2\gamma^{\mu\dagger}\gamma^2 = \gamma^{\mu T}$. Für die Transformation der Bilinearformen ist es hilfreich, Spinorindizes explizit auszuschreiben.

b.w.

Aufgabe H35 *Kohärente Zustände des elektromagnetischen Feldes* (5 Punkte)

Für eine feste (reelle) Polarisation ϵ^μ lautet das quantisierte elektromagnetische Feld

$$\epsilon^\mu A_\mu(x) \;=\; \int \mathrm{d}\tilde{k} \left\{ a(\vec{k})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \;+\; a^\dagger(\vec{k})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} \right\} \qquad \text{mit} \qquad k^0 \;=\; k^0(\vec{k}) \;=\; \sqrt{\vec{k}^{\,2}}$$

und den Vertauschungsrelationen

$$[a(\vec{k})\,,\, a^\dagger(\vec{q})\,] \;=\; 2k^0\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{k}-\vec{q}) \;.$$

Hier wird die Notation

$$\mathrm{d}\tilde{k} \;:=\; \mathrm{d}^3k/[(2\pi)^3(2k^0)]$$

für das lorentzinvariante Integrationsmaß im Impulsraum benutzt.

a) Normieren Sie den n-Photon-Zustand

$$|n\rangle \;\equiv\; |F(\vec{k}_1,\ldots,\vec{k}_n)\rangle \;=\; \alpha_n \int \mathrm{d}\tilde{k}_1 \cdots \mathrm{d}\tilde{k}_n\; F(\vec{k}_1,\ldots,\vec{k}_n)\; a^\dagger(\vec{k}_1)\cdots a^\dagger(\vec{k}_n)\;|0\rangle \;\;,$$

d.h. bestimmen Sie α_n sowie $\langle n|m\rangle$. F sei total symmetrisch in den Impulsen.

b) Welche Norm hat der kohärente Zustand

$$\begin{aligned} |\tilde{\eta}\rangle \;&=\; \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}\tilde{k}\,\tilde{\eta}(\vec{k})\,a^\dagger(\vec{k})}\;|0\rangle \\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \mathrm{d}\tilde{k}_1\cdots\mathrm{d}\tilde{k}_n\,\eta(\vec{k}_1)\ldots\eta(\vec{k}_n)\; a^\dagger(\vec{k}_1)\cdots a^\dagger(\vec{k}_n)\;|0\rangle \;\; ? \end{aligned}$$

Berechnen Sie $a(\vec{q})\,|\tilde{\eta}\rangle$.

c) Sei $|\eta\rangle$ der normierte kohärente Zustand und $N = \int \mathrm{d}\tilde{k}\; a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})$ der Anzahl-Operator. Bestimmen Sie die Schwankung

$$(\Delta N)^2 \;=\; \langle\eta|\,N^2\,|\eta\rangle - \langle\eta|\,N\,|\eta\rangle^2 \;\;.$$